O futbalovej lopte

Sú obdobia, keď sa pozornosť mnohých ľudí sústreďuje na 22 mladých mužov naháňajúcich loptu po ihrisku v snahe dopraviť ju do bránky súpera. V tomto príspevku sa zamerajme na tu malú guľu s priemerom 685 – 690 milimetrov a hmotnosťou 425 – 435 gramov, ktorá nedá spávať mnohým z nás. Špeciálne sa budeme zaoberať kombinatorickými vlastnosťami futbalovej lopty a jej symetriami.

Keď sa pozorne pozriete na futbalovú loptu môžete ľahko zistiť, že je zošitá z 32 kúskov kože, ktoré majú tvar 5-uholníkov a 6-uholníkov (ktoré budeme nazývať *steny*), pričom v každom spoločnom bode viac ako dvoch stien (*vrchole*) sa spájajú práve tri steny. Prirodzeným spôsobom vzniká otázka z koľkých päťuholníkov a koľkých šesťuholníkov sa skladá lopta? Podobne sa môžeme pýtať, či sa dajú vytvoriť aj (*kombinatoricky,* tj. majúce rovnaké počty a typy stien a vrcholov) iné lopty, pričom pod futbalovou loptou rozumieme len takú, ktorá sa skladá len z päťuholníkov a šesťuholníkov a vo všetkých vrcholoch sa "stretávajú“ len tri steny. Pretože platí Steinitzova veta (viď. [1], str. 33.), ktorá vyjadruje súvis medzi kombinatorickými a geometrickými vlastnosťami mnohostenov, stačí sa zaoberať len rovinnými vrcholovo 3-súvislými grafmi, ktoré sú kombinatoricky izomorfné s uvažovanou loptou. (Rovinný graf je vrcholovo 3-súvislý, ak vynechaním dvoch ľubovoľných vrcholov a s nimi incidujúcich hrán ostane súvislým grafom.) Na loptu sa budeme dívať ako na konvexný mnohosten.

Ak postupne označíme symbolmi s, h, v počet stien, hrán a vrcholov konvexného mnohostena, tak pre tieto symboly platí známa Eulerova formula

$$s - h + v = 2.$$

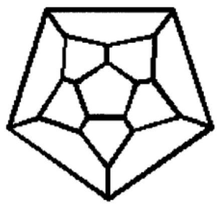
Ak navyše s_5 a s_6 označujú počty päťuholníkov a šesťuholníkov, tak platia vzťahy

$$s = s_5 + s_6 \quad \text{a} \quad 2h = 5s_5 + 6s_6 = 3v.$$

Po vynásobení Eulerovej formuly šiestimi a dosadení z týchto vzťahov dostaneme

$$(6s - 2h) + 2(3v - 2h) = 12,$$
$$[6(s_5 + s_6) - (5s_5 + 6s_6)] + 2(3v - 3v) = 12,$$
$$12s_5 + 0s_6 = 12.$$

Posledný vzťah je nutnou podmienkou pre existenciu 3-valentného mnohostena, ktorý sa skladá len z päťuholníkov, šesťuholníkov a všetky vrcholy sú stupňa 3. Z neho bezprostredne vyplýva, že ak existuje futbalová lopta, tak sa musí skladať z práve 12 päťuholníkov a počet šesťuholníkov nie je ňou obmedzený. Pretože podmienka je nutná, ale nie postačujúca, pre počty stien môžeme sa pýtať na to, koľko môže mať lopta šesťuholníkov. Z prác publikovaných v druhej polovici minulého storočia vyplýva, že počet šesťuholníkov môže byť ľubovoľný, okrem jedného (viď. [1], str. 61.) Na nasledujúcom obrázku je nakreslený graf pravidelného 12-stena (dodekaédra), z ktorého je vytvorená futbalová lopta.



nesúhlasne zhodné útvary však nemôžeme stotožniť v 3-rozmernom priestore. (Viac informácií o symetriách niektorých mnohostenov je v [2].)

Úloha: Ak 5-uholníky lopty postupne označíme číslami 1, 2, ..., 11, 12, tak koľko navzájom rôznych (neizomorfných) označení futbalovej lopty existuje?
Riešenie. Ak by lopta bola pevne prichytená k podložke, tak počet očíslovaní by bol rovný počtu permutácií 12-prvkovej množiny, t.j. 12!. Pretože existuje 60 súhlasných zhodností, ktoré zobrazujú 12-sten (a teda aj loptu) na seba, medzi 12! očíslovanými loptami sú skupiny 60-tich lôpt, ktoré majú po vhodnom otočení rovnaké očíslovanie. Počet navzájom neizomorfných očíslovaní futbalovej lopty je $\frac{12!}{60} = 7\,983\,360$.

Podobnú úlohu môžeme formulovať aj pre hraciu kocku obodkovanú jednou až šiestimi bodkami. Pretože kocka je súmerná podľa deviatich rovín (tri sú určené stredmi stien a šesť dvojicami protiľahlých hrán), ktoré rozdeľujú povrch kocky na 48 elementárnych trojuholníkov, existuje 48 zhodností, ktoré reprodukujú kocku. Pretože len polovica je súhlasných, počet navzájom rôznych obodkovaní je $\frac{6!}{24} = 30$. (Poznámka. Hracie kocky, ktoré používame v spoločenských hrách sú bodkované tak, aby súčet bodiek na protiľahlých hranách bol sedem existujú len dve navzájom neizomorfne obodkované kocky.)

Pozorný čitateľ si môže položiť podobné otázky aj o loptách, ktoré by boli zložené len z trojuholníkov a šesťuholníkov, prípadne zo stien iných typov.

Literatúra:
[1] E.Jucovič: Konvexné mnohosteny, Veda Bratislava 1981
[2] M.Trenkler: On 4-valent 3-polytopes with a prescribed group of symmetries, Graphs, Hypergraphs and Block systems, Zielona Gora, 1976, 311-317

Adresa autora:
Marián Trenkler
Katedra matematiky a fyziky
Pedagogická fakulta KU
Nám. A.Hlinku 56
034 01 Ružomberok